Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2023/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance f(t), en centimètres, entre le fond du tiroir M et le fond du meuble O modélise la fermeture du tiroir à partir de l’instant où l’utilisateur le pousse. L’exercice utilise une équation différentielle puis étudie la fonction obtenue, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant de $r^2 + 5r + 4 = 0$ est $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif : les deux racines sont réelles et distinctes. La formule du second degré donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$, soit -1 et -4.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.

Les racines de l’équation caractéristique sont réelles et distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Le tableau fourni indique que la solution générale de l’équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines. Aucune condition initiale n’étant imposée ici, les constantes restent arbitraires.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. À l’instant t = 0, le point M est situé à 20 cm de O et se déplace vers O avec une vitesse négative égale à -10 cm·s⁻¹. En déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La distance OM est représentée par $f(t)$, en centimètres. À l’instant initial, elle vaut 20 cm. La dérivée de cette distance par rapport au temps représente la vitesse du point M. La vitesse initiale étant négative et égale à $-10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$, les deux conditions se lisent directement :

Grandeur	Valeur initiale
Distance	$f(0) = 20\ \text{cm}$
Vitesse	$f'(0) = -10\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression de la distance : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. Cette expression donne la distance exacte en centimètres. Son approximation numérique permet de vérifier l'ordre de grandeur de la distance après deux secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}16 \text{ cm}.$

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.**

À 4 secondes, la distance vaut $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm. Elle est donc strictement inférieure au seuil de 0,5 cm. Comme f est continue et que $f(0) = 20 > 0{,}5$, elle passe sous ce seuil à un instant compris entre 0 et 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En rappelant que lim e⁻ᵘ = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer lim f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les deux exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les deux exponentielles tendent donc vers 0 ; leur combinaison linéaire tend également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C possède une asymptote et en donner une équation.**

Une courbe admet une asymptote horizontale lorsque la fonction tend vers une limite finie en $+\infty$. Ici, cette limite est 0. La droite d'équation $y = 0$, qui est l'axe des abscisses, est donc l'asymptote horizontale de C en $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On utilise $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$ pour dériver chacun des termes de f. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le signe moins devant le terme et la dérivée -4 de l'exposant donnent $+\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. On admet que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 0.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, jusqu'à son arrêt. Indiquer t, la valeur de f(t) arrondie au centième et le résultat de la condition.

À chaque étape, t augmente de 0,1 et l'algorithme teste si $f(t) > 0,5$. Les valeurs du tableau sont arrondies au centième. La condition reste vraie à $t = 3,8$, puis devient fausse à $t = 3,9$: l'algorithme s'arrête alors.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8		

0,64 VRAIE
0,58 VRAIE
0,52 VRAIE
0,47 FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme s'arrête à $t = 3,9$, car $f(3,9) \approx 0,47 < 0,5$. À l'étape précédente, $f(3,8) \approx 0,52 > 0,5$. Le premier dixième de seconde où le critère est satisfait est donc 3,9 s ; le franchissement réel du seuil se situe entre 3,8 s et 3,9 s.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Premier dixième satisfaisant le critère : $t = 3,9$ s.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}[F(4) - F(0)]$. En évaluant aux bornes, $F(4) - F(0) = \frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}$. La division de chaque terme par 4 donne l'expression annoncée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

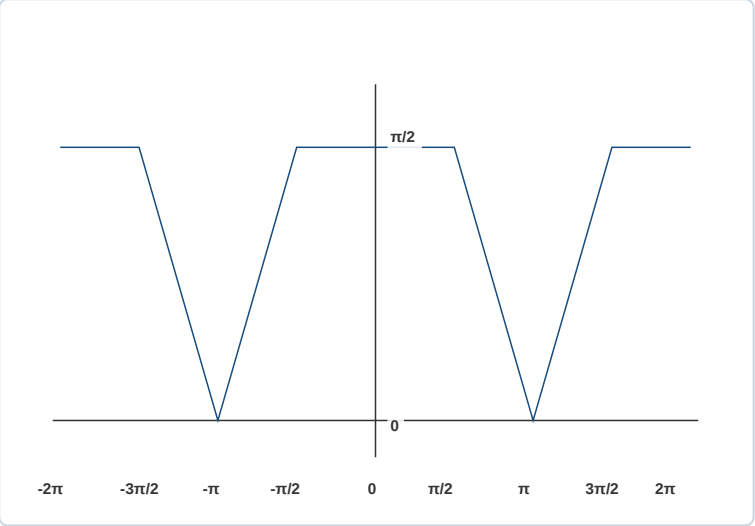
2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur une demi-période et prolongée par parité et périodicité. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier et une somme partielle, puis sur l'approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur [-2π ; 2π], sachant que f est paire, de période 2π, et que f(t) = π/2 pour 0 ≤ t < π/2, puis f(t) = π - t pour π/2 ≤ t ≤ π.

Sur une période centrée en 0, le graphe est horizontal à la hauteur $\frac{\pi}{2}$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, et rejoint linéairement 0 en $-\pi$ et π. La parité et la périodicité donnent le tracé sur tout l'intervalle demandé.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé pair, de période 2π, avec paliers à $\frac{\pi}{2}$ et zéros en $-\pi$ et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n ≥ 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

On a $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. Comme f est paire et $\sin(nt)$ impaire, le produit $f(t)\sin(nt)$ est impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi, \pi]$ est donc nulle, quel que soit l'entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Avec la période $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\omega = 1$ rad·unité de temps^{-1}.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Ici, grâce à la parité et à $T = 2\pi$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Or $\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{3\pi^2}{8}$. Donc $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n ≥ 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Comme f est paire et $T = 2\pi$, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale aux bornes des deux expressions de f :

$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt\right]$, ce qui donne la formule demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

En appliquant $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$ aux trois premiers entiers, on obtient :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

Ces valeurs sont les coefficients demandés.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. **Déduire l'expression de $s_3(t)$: $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

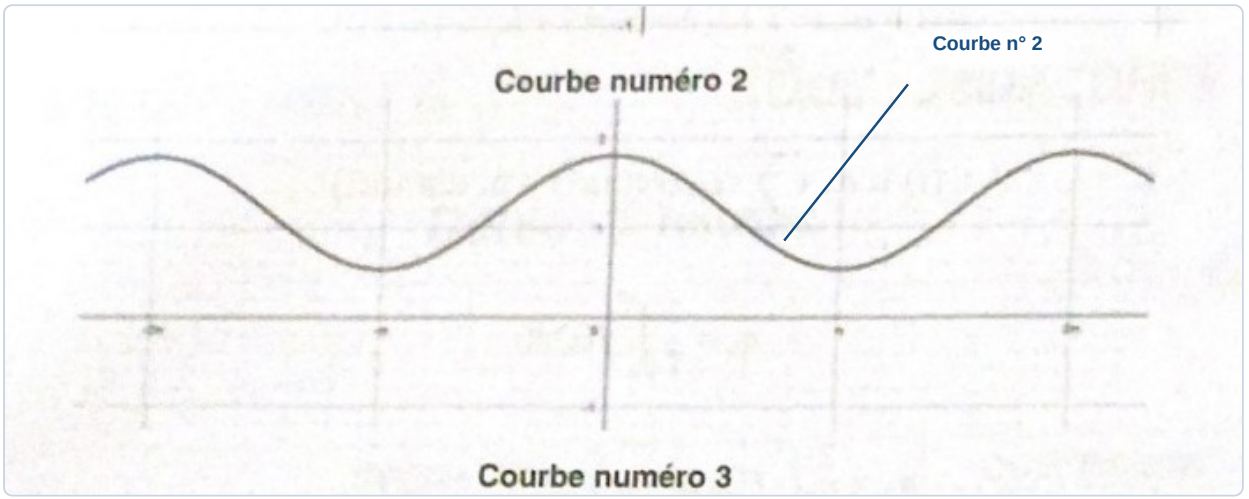
La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque $b_n = 0$. En substituant les valeurs de a_0, a_1, a_2, a_3, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.**

La somme s_3, composée de cosinus, est lisse et périodique. La courbe qui présente cette allure est la courbe numéro 2.

Courbe associée à s_3



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 2.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En remplaçant les coefficients dans $P = (a_0)^2 + \frac{1}{2}[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, on trouve $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. Son arrondi à 10^{-4} près est $1{,}6437$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **On admet que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F². Choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Recopier une seule réponse, sans justification.**

L'écart relatif entre P et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$ est d'environ $0{,}0739\,\%$. Parmi les choix proposés, cela correspond à $0{,}1\,\%$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS BÂTIMENT

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les thèmes sont la fermeture d'un tiroir modélisée par une équation différentielle et l'étude de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Une fonction strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et de limite nulle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
- Pour une fonction de période T, la pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$; ici $T = 2\pi$, donc $\omega = 1$.
- La parité paire annule les coefficients b_n ; pour $n \geq 1$, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale, positive, de la vitesse signée du point M.
- Dans l'algorithme, tester la condition après chaque incrément de t et arrêter dès qu'elle devient fausse.
- Pour les coefficients de Fourier, utiliser la période, la parité et les bornes d'intégration correspondant au formulaire.
- Respecter les précisions demandées : valeurs exactes, centième dans le tableau et 10^{-4} pour P.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du mouvement du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ pour obtenir les racines. Elles déterminent la forme générale de f. Les données initiales f(0) et f'(0) permettent ensuite de calculer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n de la série de Fourier sont-ils nuls ?

La fonction f est paire, tandis que sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur une période symétrique est nulle. Cela entraîne $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez votre temps entre l'étude du tiroir et celle de Fourier, sans négliger les questions de calcul. Gardez quelques minutes pour vérifier les signes, les unités et les arrondis.

Q : Quelles précisions de rédaction et de calcul sont demandées ?

Justifiez les questions qui demandent une démonstration et donnez des valeurs exactes lorsqu'elles sont exigées. Dans le tableau de l'algorithme, arrondissez f(t) au centième, puis donnez P à 10^{-4} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2023/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Bâtiment : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.