Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2023/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d’un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps, donnée par une équation différentielle puis par une expression exponentielle. L’exercice étudie les conditions initiales, les variations, le temps de fermeture et le développement limité de cette fonction.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant de l’équation est $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif, donc il y a deux racines réelles distinctes : $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

L’équation caractéristique admet les deux racines distinctes -1 et -4. D’après le tableau fourni, la solution générale de l’équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position et de la vitesse du point M à l’instant t = 0, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f donne la distance OM. À l’instant initial, cette distance vaut 20 cm. La vitesse du point M vers O est négative et égale à -10 cm·s^{-1} ; elle correspond à la dérivée de la distance.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. À l’aide de l’expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On évalue l’expression admise à $t = 2$: $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression donne la distance exacte en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}156705$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes, et justifier.**

La fonction est strictement décroissante. On calcule la distance à 4 secondes : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427365$ cm. Elle est alors inférieure à 0,5 cm ; le seuil a donc été franchi avant cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le tiroir est fermé en moins de 4 s, car $f(4) \approx 0{,}427365 < 0{,}5$ cm.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque $t \to +\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. La fonction étant une combinaison linéaire de ces exponentielles, elle tend également vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de cette limite que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation égale à cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

Par dérivation composée, $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. En tenant compte du signe moins devant le second terme de f, on obtient :

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée étant négative sur $[0; +\infty[$, la fonction y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 0.

t	**0**	$+\infty$
Variations de f	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant au besoin des lignes et en indiquant les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} ainsi que la valeur de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

L'algorithme augmente t de 0,1 tant que $f(t) > 0{,}5$. Les valeurs de $f(t)$ sont arrondies au centième ; la condition est évaluée avec la valeur non arrondie.

Ligne	t	$f(t)$ **arrondie à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

La condition devient fausse à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À $t = 3{,}8$, la condition reste vraie et l'algorithme ajoute 0,1. À $t = 3{,}9$, elle devient fausse : la boucle s'arrête. La distance est alors inférieure au seuil de fermeture fixé à 0,5 cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À l'arrêt, $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé.

Question 4.a. À partir du développement limité fourni, déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.

Le développement limité fourni a pour partie régulière $20 - 10t - 15t^2$. Ainsi, $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

T : $y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions, recopier celle qui donne le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Cette question est à choix multiple, une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La proposition exacte est celle qui conserve le polynôme $20 - 10t - 15t^2$ et écrit le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 4.c. À partir du développement limité, indiquer si la courbe est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro.

La tangente est T : $y = 20 - 10t$. Le développement limité donne $f(t) - (20 - 10t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$, où $\varepsilon(t) \to 0$. Le facteur entre parenthèses est négatif près de 0 ; pour $t > 0$ proche de 0, l'écart à la tangente est donc négatif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $t > 0$ proche de 0, la courbe est en dessous de T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques pour favoriser les ventes, puis étudie la durée de réparation de vélos et les préférences d'achat de ses clients. Les questions portent sur les probabilités conditionnelles, une loi binomiale et l'estimation d'une proportion par intervalle de confiance.

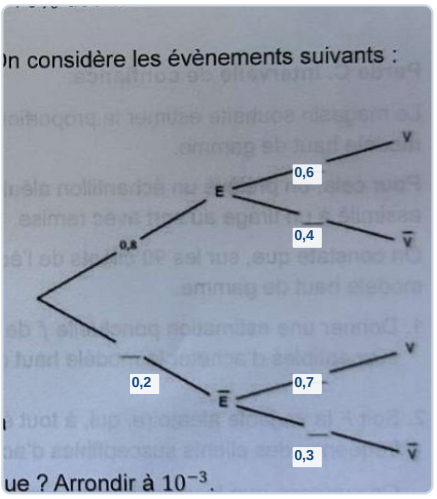
Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

Les premières branches distinguent les deux types de vélos. Les probabilités de leurs branches sont 0,8 et 0,2. À chaque bifurcation, les deux probabilités conditionnelles sont complémentaires, car les issues vente et absence de vente couvrent tous les cas considérés.

1. Après E : vente 0,6 ; absence de vente $1 - 0,6 = 0,4$.
2. Après $\overline{E}$: vente 0,7 ; absence de vente $1 - 0,7 = 0,3$.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Arbre complété : $P(E) = 0,8$, $P(\overline{E}) = 0,2$; après E : 0,6 et 0,4 ; après $\overline{E}$: 0,7 et 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité qu'un vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.

L'événement recherché correspond au chemin où le vélo prêté est électrique et où le prêt conduit à une vente. La probabilité de ce chemin se calcule en multipliant la probabilité de la première branche par la probabilité conditionnelle de la seconde branche. Ainsi, $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$. Cette probabilité porte sur un vélo choisi au hasard parmi les vélos prêtés.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La probabilité recherchée pour un vélo prêté choisi au hasard est $P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Une vente peut résulter d'un prêt électrique ou d'un prêt mécanique. Ces deux chemins sont incompatibles : leurs probabilités s'additionnent. Le chemin électrique a pour probabilité $0,8 \times 0,6 = 0,48$, tandis que le chemin mécanique a pour probabilité $0,2 \times 0,7 = 0,14$. Donc $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$, ce qui démontre l'égalité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est bien $P(V) = 0,62$.

Question 4. **Sachant qu'un prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique et arrondir à 10^{-3}.**

On cherche la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a débouché sur une vente. Par définition, $P(E \mid V) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Les résultats précédents donnent $P(E \mid V) = \frac{0,48}{0,62} = \frac{24}{31} \approx 0,7741935$. L'arrondi au millième est donc 0,774. Il s'agit d'une probabilité parmi les prêts ayant conduit à une vente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Parmi les prêts ayant conduit à une vente, la probabilité d'un vélo électrique est $0,774$ au millième.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **La variable aléatoire X, qui compte parmi 80 vélos réparés ceux dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre, suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.**

On considère 80 vélos réparés, et chaque vélo constitue un essai. La probabilité qu'une réparation nécessite moins d'une heure est 0,62. La variable X compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de réparations de moins d'une heure, parmi ces 80 essais. Selon l'énoncé, X suit donc une loi binomiale de paramètres n = 80 et p = 0,62.

Paramètre	Valeur
Nombre d'essais n	80
Probabilité de succès p	0,62

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La loi de X est la loi binomiale de paramètres 80 et 0,62 : $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. Déterminer la probabilité P(X = 40) et arrondir à 10^{-3}.

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure se calcule par $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40}$. Le facteur 0,38 est la probabilité complémentaire d'une réparation nécessitant moins d'une heure. Le calcul donne environ 0,0083 ; arrondi au millième, le résultat est 0,008.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est $P(X = 40) \approx 0,008$ au millième.

Question 3. Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos dont la réparation nécessite moins d'une heure soit strictement supérieur au nombre de ceux dont la réparation nécessite plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Dans le modèle à deux issues de l'exercice, le nombre de réparations de plus d'une heure est $80 - X$. La condition demandée devient $X > 80 - X$, soit $X > 40$. Comme X est entier, il faut calculer $P(X \geq 41)$, ou encore le complément de $P(X \leq 40)$. Le calcul avec la loi $\mathcal{B}(80\,;\,0,62)$ donne environ 0,9809, soit 0,981 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité que le nombre de réparations de moins d'une heure soit supérieur est $P(X > 40) \approx 0,981$ au millième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir des 54 clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme parmi les 90 clients de l'échantillon, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On calcule donc $f = \frac{54}{90} = 0,6$. Cette fréquence observée, égale à 60 %, est l'estimation ponctuelle demandée de la proportion p.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'estimation ponctuelle de la proportion de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme est $f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion p.**

La formule fournie donne l'intervalle $\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$. Avec $f = 0,6$ et $n = 90$, la marge vaut $1,96\sqrt{\frac{0,6\times0,4}{90}} \approx 0,101216$. Les bornes sont environ 0,498784 et 0,701216, soit, au millième, 0,499 et 0,701.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'intervalle de confiance au niveau de 95 % est $[0,499\,;\,0,701]$, arrondi au millième.

Question 2.b. **Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.**

Non. L'intervalle calculé est une estimation issue d'un échantillon et son niveau de confiance est de 95 %. Cela ne signifie pas que la proportion réelle appartient avec certitude à cet intervalle particulier. La proportion p est fixe mais inconnue ; selon l'échantillon obtenu, l'intervalle peut ne pas la contenir. On ne peut donc pas affirmer que p appartient nécessairement à l'intervalle.

- Le niveau de confiance de 95 % ne signifie pas une certitude.
- La proportion réelle reste inconnue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas être certain que la proportion réelle appartienne à cet intervalle de confiance particulier.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, durée deux heures, coefficient 2, ou 3 pour Traitement des matériaux. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par un modèle exponentiel et des situations de vente et de réparation de vélos. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse, algorithmes, probabilités, loi binomiale et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y'' + 5y' + 4y = 0$ se déterminent à partir des racines de l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.
- La formule des probabilités totales donne $P(V) = P(E)P(V|E) + P(\text{non } E)P(V|\text{non } E)$.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le signe de la vitesse initiale pour déterminer $f'(0)$, et distinguer cette valeur de la position $f(0)$.
- Dans l'algorithme, vérifier la condition après chaque incrément et associer chaque valeur de t au bon numéro de ligne.
- Pour la comparaison des réparations, traduire l'effectif complémentaire par 80 - X avant d'écrire l'inégalité.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne permet pas d'affirmer avec certitude que la proportion inconnue y appartient.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines réelles distinctes donnent la forme générale de la solution. Les conditions initiales $f(0)$ et $f'(0)$ permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente ?

On additionne les probabilités des chemins menant à une vente : le produit de la probabilité d'un vélo électrique par celle d'une vente dans ce cas, puis le produit correspondant aux vélos mécaniques.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation avec la variable X ?

Si X compte les réparations de moins d'une heure parmi 80 vélos, le nombre de réparations de plus d'une heure vaut 80 - X. La condition demandée s'écrit donc $X > 80 - X$.

Q : L'intervalle de confiance garantit-il que la proportion p s'y trouve ?

Non. Le niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode sur des échantillons répétés. Pour l'échantillon observé, on ne peut pas affirmer avec certitude que la proportion inconnue appartient à l'intervalle obtenu.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2023/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Bâtiment : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.