Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - BTS Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2022/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot propulsé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'étude porte sur la résolution de cette équation, les variations de la vitesse, la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule de l'équation homogène $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$, donc on remplace directement cette valeur dans l'expression générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L'égalité étant vraie pour tout $t \geq 0$, g est bien une solution de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant à la solution particulière $g(t) = 5$ les solutions de l'équation homogène associée. Ces dernières sont $ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle. On obtient ainsi toutes les solutions sur $[0; +[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale impose $f(0) = 5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la vitesse du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers plus l'infini est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +$, $-0,8t \to -$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Le terme exponentiel tend alors vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite de $f(t)$ est donc 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La fonction f tend vers la valeur finie 5 lorsque $t \to +$. Sa courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante, de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$t \geq 0$	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	
Variation de f	20	↘	5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais. Elle décroît et tend vers 5 m/s, mais le chariot ne s'arrête pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m/s}$ et tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f sur $[0; +[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de la vitesse, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m. Sa valeur approchée est $15,32508$ m ; l'arrondi au centimètre est donc $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.**

Le logiciel affiche la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la proposition qui associe ce polynôme à ce reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 15 + 5 = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient la droite demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

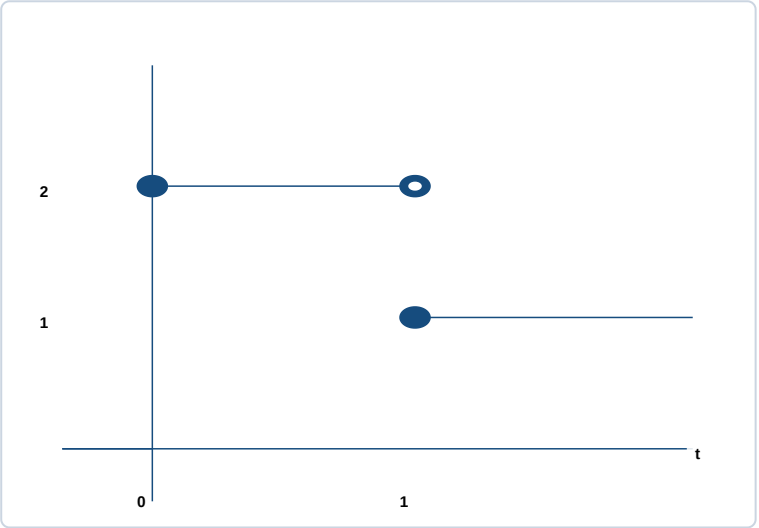
Un système électrique entrée-sortie reçoit un signal causal défini avec la fonction échelon unité, et sa fonction de transfert est donnée. Les questions utilisent les transformées de Laplace pour déterminer le signal de sortie, l'étudier par intervalles et compléter sa représentation graphique.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction d'entrée e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Comme $U(t) = 0$ pour $t < 0$ et vaut 1 dès $t = 0$, l'entrée est nulle avant 0. À $t = 0$, elle saute à 2; à $t = 1$, le terme $-U(t-1)$ la fait passer à 1. Sur le graphique, les extrémités doivent donc distinguer la valeur prise de la limite à gauche.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité de la transformée de Laplace, on transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$, puis $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$ pour le retard d'une unité. Il suffit ensuite de réunir les deux termes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).

La relation entrée-sortie est $S(p) = H(p)E(p)$. Ici, le sujet donne $H(p) = 1/(p+1)$, et la transformée de l'entrée est $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. En multipliant, puis en séparant les termes sans supprimer le facteur de retard, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met les deux fractions du membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$, ce qui redonne exactement la fraction du membre de gauche. L'égalité est vérifiée pour les valeurs de p pour lesquelles les expressions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de [1/(p + 1)]e^(-p), en utilisant le formulaire.

Les deux premières inverses se lisent dans le formulaire: $1/p$ correspond à $U(t)$, et $1/(p+1)$ à $e^{-t}U(t)$. Pour les termes multipliés par e^{-p}, on applique la propriété de retard d'une unité: $F(p)e^{-p}$ correspond à $f(t-1)U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé: $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

À partir de la décomposition de la question précédente, le premier terme de $S(p)$ a pour transformée inverse $2(1-e^{-t})U(t)$. Le second terme contient un retard d'une unité, donc un facteur $U(t-1)$; il est nul sur l'intervalle demandé. Il ne reste que le premier terme pour $0 \leq t < 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1-e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

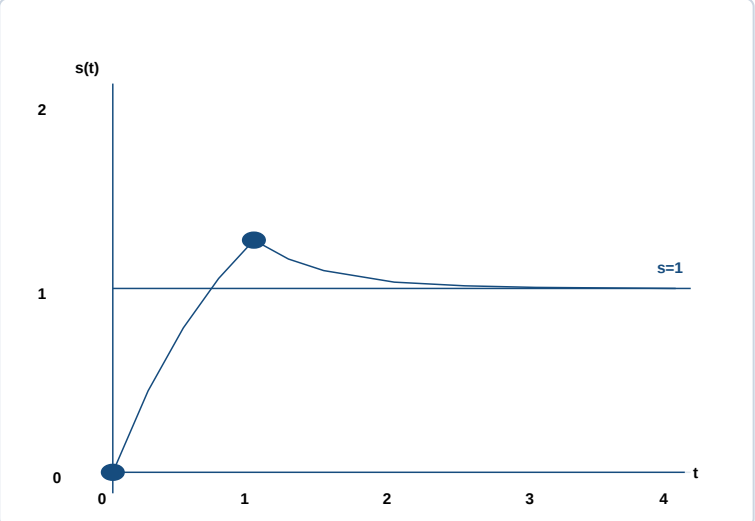
On utilise l'expression fournie pour $t \geq 1$ et on remplace t par 1: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $ee^{-1} = 1$, cette valeur se simplifie en $2 - 2/e$. Numériquement, elle vaut environ $1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3.$

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1-e^{-t})$ augmente de 0 à $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, la formule donnée est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$; comme $e - 2 > 0$, le signal décroît ensuite vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur à $t = 1$. Le tracé indique aussi l'asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe passe de $(0;0)$ à $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers plus l'infini.

Pour $t \geq 1$, le signal s'écrit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers 0. Il ne reste donc que le terme constant; cela correspond également à l'asymptote horizontale représentée sur le graphique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 ou 2 selon la spécialité. Elle étudie le freinage d'un chariot par équation différentielle et calcul intégral, puis la réponse d'un système électrique par transformées de Laplace, avec étude et représentation des signaux.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a si a est non nul ; la solution générale ajoute ke^(-at).
- Si f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, alors sa limite vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = 5.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t0,t1] f(t)dt.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution modélisant la vitesse.
- Justifier les variations à partir du signe de f' et distinguer une vitesse qui tend vers 5 d'une vitesse qui tend vers zéro.
- Pour la distance, calculer F(1) - F(0) dans le bon ordre et arrondir au centième de mètre.
- En transformée de Laplace, appliquer le facteur exponentiel au terme décalé et respecter les intervalles indiqués.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de l'exercice sur le freinage ?

On résout d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, dont les solutions sont ke^(-0,8t). On ajoute ensuite la solution constante 5 de l'équation complète, puis on détermine k avec la condition initiale f(0) = 20.

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse donnée ?

On utilise une primitive F de la vitesse et on calcule d = F(1) - F(0) sur l'intervalle demandé. La valeur exacte obtenue est ensuite arrondie au centimètre, c'est-à-dire au centième de mètre.

Q : Comment gérer le temps entre les deux exercices ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Les trois parties du premier exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les graphiques.

Q : Quel coefficient faut-il retenir pour cette épreuve ?

Le sujet indique un coefficient de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Chaque exercice vaut 10 points, soit 20 points pour l'ensemble du sujet.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2022/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Bâtiment : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.