Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 (3 pour la spécialité Traitement des matériaux)**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et conformité de rivets (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 9**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2022/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ ralentit selon une vitesse modélisée par une équation différentielle, puis par la fonction f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5. L'étude porte sur la résolution de l'équation, les variations de la vitesse, la distance parcourue et le développement limité de f au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule fournie donne, pour $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$, donc on remplace directement a par cette valeur. La constante k est réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de (E) : y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, égal au second membre de (E). Cette égalité vaut pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière, $g(t) = 5$, aux solutions de l'équation homogène associée. On reprend donc la forme trouvée en 1.a et on lui ajoute 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

On applique la condition initiale à la solution générale : $f(0) = ke^0 + 5 = 20$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on obtient f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers 0 et le terme constant reste égal à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. En déduire que la courbe C admet une asymptote et donner une équation de celle-ci.

La courbe d'une fonction ayant une limite finie L en $+\infty$ admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite de $f(t)$ vaut 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression admise f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction décroît strictement de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse reste positive et tend vers 5 m·s⁻¹. Elle n'atteint donc jamais zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : selon le modèle, la vitesse reste supérieure à 5 m·s⁻¹ et le chariot ne s'arrête pas.

Question 4.a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette dérivée est précisément $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **La distance parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par d = ∫ de t_0 à t_1 f(t)dt. Calculer sa valeur exacte entre t_0 = 0 et t_1 = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur est arrondie au centimètre après évaluation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier l'unique expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, sans justification. Les propositions sont : 20 - 12t + (24/5)t² + ε(t), avec lim quand t tend vers 0 de ε(t) = 0 ; 20 + (24/5)t² ; 20 - 12t + 4,8t² + t²ε(t), avec lim quand t tend vers 0 de ε(t) = 0.**

La troisième proposition est la seule écrite sous la forme d'un développement limité d'ordre 2, avec un reste en $t^2\varepsilon(t)$ tel que $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et, avec l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. On remplace ces valeurs dans l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et conformité de rivets

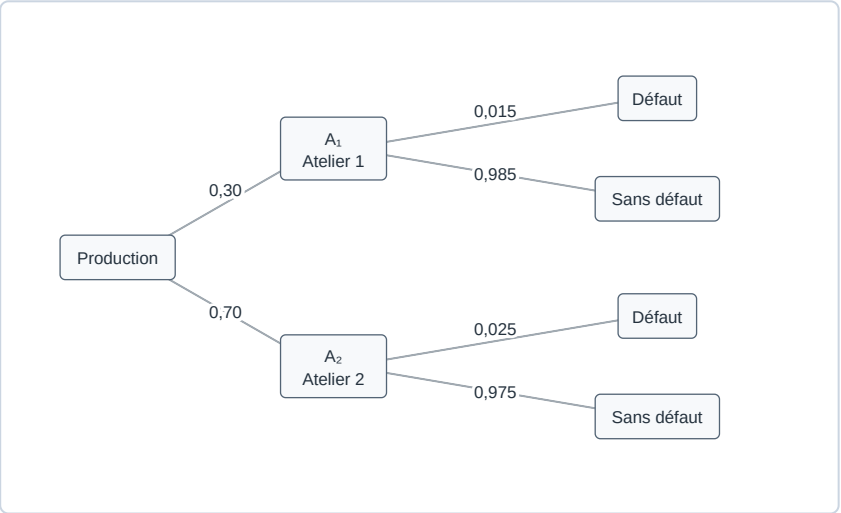
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice étudie aussi la durée de fonctionnement des tubes par une loi exponentielle, puis estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. À partir des données de production des deux ateliers, réaliser un arbre pondéré décrivant la situation : l'atelier 1 produit 30 % des tubes et 1,5 % de ceux-ci présentent un défaut ; l'atelier 2 produit 70 % des tubes et 2,5 % de ceux-ci présentent un défaut.

On part de la production totale, puis on sépare les deux ateliers. Depuis chaque atelier, les deux branches indiquent les probabilités conditionnelles d'un défaut et de son absence. Pour chaque atelier, ces deux probabilités sont complémentaires et leur somme vaut 1.

Production et défaut des tubes



Probabilités de production par atelier, puis probabilités conditionnelles de défaut ou d'absence de défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : ateliers 1 et 2 de probabilités 0,30 et 0,70 ; probabilités conditionnelles de défaut 0,015 et 0,025.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Le chemin « atelier 1, puis défaut » correspond à l'intersection des événements A_1 et D. On multiplie la probabilité de choisir l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier :
$P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Les deux ateliers couvrent toute la production. La probabilité d'un défaut est donc la somme des probabilités des deux chemins qui aboutissent à un défaut :
$P(D) = P(A_1)P_{A_1}(D) + P(A_2)P_{A_2}(D)$.
Avec les données : $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité cherchée est conditionnelle à l'absence de défaut. La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut vaut $0{,}70 \times 0{,}975$, et celle d'obtenir un tube sans défaut vaut $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Ainsi,
$P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}70 \times 0{,}975}{0{,}978} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T, en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page originale donne $\lambda = 0{,}001$ par heure. Pour une loi exponentielle, l'espérance est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Donc $E(T) = \dfrac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. En moyenne, un tube fluorescent fonctionne 1 000 heures avant de présenter une défaillance.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec le paramètre indiqué dans l'énoncé, $\lambda = 0{,}001$:
$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$.
Arrondie au centième, la probabilité vaut 1,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$ au centième.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0{,}001$ par heure : $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$.
Arrondie au centième, cette probabilité vaut 0,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes :
$\hat{p} = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$.
Cette fréquence estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. La fréquence F des rivets conformes est associée à chaque échantillon de 1 000 rivets. En utilisant la formule fournie pour un intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur la fréquence observée et arrondir ses bornes à 10^{-3} près.

On utilise la formule de l'intervalle de confiance à 95 % fournie dans l'énoncé, avec la fréquence observée $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$:
$\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$.
Les bornes non arrondies sont environ 0,965323 et 0,984677. Arrondies au millième, elles donnent l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \ ; \ 0{,}985]$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS BÂTIMENT

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures et a un coefficient de 2, ou 3 en Traitement des matériaux. Elle étudie le freinage d'un chariot, la production de tubes fluorescents et la conformité de rivets. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, intégrales, développements limités, probabilités, loi exponentielle et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre $y' + ay = b$, combiner une solution particulière de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène.
- Si $f(t)$ tend vers L quand t tend vers $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni pour une proportion est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale $f(0) = 20$ pour déterminer la constante de la solution différentielle.
- Pour la distance, intégrer la vitesse entre les deux instants indiqués et respecter l'arrondi au centimètre.
- Distinguer probabilité d'une durée inférieure à t et probabilité supérieure à t, en utilisant la formule adaptée à la loi exponentielle.
- Dans l'intervalle de confiance, employer la fréquence observée et l'effectif $n = 1\,000$, puis arrondir les bornes à 10^{-3}.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. La condition $f(0) = 20$ permet ensuite de déterminer la constante de la solution.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube dure plus de 10 000 heures ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ici, remplacez λ par 0,001 et t par 10 000, puis arrondissez le résultat à 10^{-2} comme le demande la question.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment sont répartis les exercices ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points. Les trois parties de chacun peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet d'organiser le travail en fonction des questions maîtrisées.

Q : Quels arrondis faut-il respecter dans les résultats ?

Respectez l'arrondi indiqué dans chaque consigne : au centimètre pour la distance, à 10^{-2} pour les probabilités de durée de vie et à 10^{-3} pour les bornes de l'intervalle de confiance.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbatiment.fr/assets/annales/bts-batiment/E2 - Mathématiques/2022/BTS Bâtiment - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Bâtiment : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.